Question 2b Pour $\lambda_1 = 0$ (valeur propre triple)

$$J - \lambda I = \begin{cases} x + y + z + 0w = 0 \Rightarrow x = -y - z \\ x + y + z + 0w = 0 \\ x + y + z + 0w = 0 \\ 0x + 0y + 0z + 0w = 0 \end{cases}$$

Base de l'espace propre $\lambda_1 = 0$: on trouve 3 vecteurs,

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow SEP(0,J)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Question 2c

$SE(0,J)$ est de dimension 3. On a trouvé 3 vecteurs directeurs.

Question 2d.

$$J.u = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = (3,3,3,0)$$

$$Ju = (3,3,3,0)$$

CENTRE DE GESTION
DE LA FONCTION PUBLIQUE TERRITORIALE DU RHÔNE

CONCOURS ou EXAMEN

donnant accès à l'emploi de :

Ingénieur territorial

à titre interne ☒ (1)

à titre externe ☐ (1)

au titre du troisième concours ☐ (1)

Spécialité Infrastructures et réseaux

Épreuve de **MATHEMATIQUES**

Date de l'épreuve 17/06/2015

A rem

Colonne réservée à l'Administration
Numéro de correction: 50
Numéro d'anonymat:
Note attribuée (réservé au jury): 588/10
Visa du jury ou de la Commission de Surveillance

(1) Cocher la case correspondante

Problème 1

Question 1-a

$$J\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad J\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1 & L_2 & L_3 & L_4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} J^2$$

Pour J^2 :

$L_1 = 1\times1 + 1\times1 + 1\times1 + 0\times0 = 3$

$L_2 = 1\times1 + 1\times1 + 1\times1 + 0\times0 = 3$

$L_3 = 1\times1 + 1\times1 + 1\times1 + 0\times0 = 3$

$L_4 = 0\times0 + 0\times0 + 0\times0 + 0\times0 = 0$

Par déduction, les lignes et colonnes étant identique on trouve :

$$J^2\begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & 0\\3 & 3 & 3 & 0\\3 & 3 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Question 1. b :

$$aI = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$(b-a)J = \begin{pmatrix} b-a & b-a & b-a & 0 \\ b-a & b-a & b-a & 0 \\ b-a & b-a & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$aI+(b-a)J = \begin{pmatrix} b & b-a & b-a & 0 \\ b-a & b & b-a & 0 \\ b-a & b-a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

on a montré que $M(a,b) = aI + (b-a)J$

Question 1C

$$M^2(ab) = (aI + (b-a)J)^2$$

$$M^2(ab) = a^2 I^2 + 2a(b-a) IJ + (b-a)^2 J^2 \quad (1)$$

De plus on a : $J^2 = 3J$ et $I^2 = I$ et $IJ = J$

(1) Devient :

$$M^2(a,b) = a^2 I + 2a(b-a) J + (b-a)^2 3J$$

Question 2a

Calcul des valeurs propres : Pour cela on va chercher les racines du polynômes caractéristiques qui s'obtient en calculant : $\det(J-\lambda I)$

$$J-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J-\lambda I = 0 \Leftrightarrow 1-\lambda \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det J-\lambda I = 0 \Leftrightarrow 1 \begin{vmatrix} (1-\lambda)^2-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \, (1-\lambda) - 1 + 1 \, (1 - (1-\lambda)$$

Question 3.a

I est la matrice identité donc :

$I \cdot V = V$

$f(V) = V$ donc on peut en déduire que I est la matrice diagonale de valeur propre $\lambda_1 = 1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$.

V est un vecteur propre de I.

Question 3.b

On a trouvé : I matrice diagonale, et J matrice diagonale donc $M_{a,b} = aI + (b-a)J$ est aussi diagonalisable.

$$P^{-1} M_{a,b} P = P^{-1}\left(aI + (b-a)J\right)P$$

$$P^{-1} M_{a,b} P = \left(P^{-1} aI + P^{-1}(b-a)J\right)P$$

$$P^{-1} M_{a,b} P = P^{-1} aIP + P^{-1}(b-a)JP$$

$$P^{-1} M_{a,b} P = aI + (b-a)D$$

donc

$$P^{-1} M_{ab} P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3(b-a) \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} M_{ab} P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-2a \end{pmatrix}$$

Problème 2

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^+$

Question 1

- $\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = +\infty$

- $\frac{x+1}{x} = \frac{x(1+1/x)}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

  $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

  On en déduit que : $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

  d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

Soit :

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Question 2

- $f(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$

Forme de la dérivée : $f'(u) = \frac{u'}{u}$ avec $u = \frac{x+1}{x}$ et $u' = -\frac{1}{x^2}$

On en déduit :

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$$

Question 3

$\cdot\ f'(x) = \dfrac{-1}{x\,(x+1)}$ forme $\dfrac{u}{v}$. dériver $f'' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$\cdot\ f''(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 \cdot (x+1)^2}$

Question 4

Posons $X = x^2$. l'equation (E) $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$ devient :

$X^2 - 4X - 1 = 0$

$D = 20$. $X_1 = \dfrac{4-\sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{5}$

$X_2 = \dfrac{4+\sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{5}$

On a donc :

$x_1 = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$

$x_2 = +\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Question 2e

$Ju = 3J$ donc 3 est bien valeur propre et $u\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur du sous espace propre de J associé à la valeur 3.

$SEP(3,J)$ est de dimension 1

On a trouvé 2 valeur propres $\lambda = 0$ et $\lambda = 3$. respectivement associé à un sous espace propre de dimension 3 et de dimension 1.

$\underline{\text{Dim } SEP(0,J) + \text{Dim } SEP(3,J) = 3 + 1 = 4 = \text{Dim } J.}$

La matrice J est diagonalisable.

Question 2f

La matrice de Passage P est composée des vecteurs des sous espaces propres : donc P :

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P^{-1} J P = D$ (matrice diagonale)

$$P^{-1} J P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$